ΠΡΟΫΠΗΡΕΣΙΑΚΗ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ – ΠΡΥ 020

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

Διαλέξεις 9 και 10

ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

31 Οκτωβρίου, 2007

Δρ. Ηλίας Κυριακίδης και Δρ. Κωνσταντίνος Πίτρης

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΣ ΣΗΜΕΡΑ

- **Χρονικά μεταβαλλόμενα σήματα**
- **Παράμετροι σημάτων**
- **Αναλογικά και ψηφιακά συστήματα**
- **Μετατροπή σημάτων**
- **Δειγματοληψία, κωδικοποίηση, κβαντοποίηση**
- **Φάσμα συχνοτήτων**
- **Συστήματα αρίθμησης**
- **Δυαδικό αριθμητικό σύστημα**
- **Μετατροπή αριθμών από ένα σύστημα σε άλλο**
- **Δυαδική αριθμητική**
- **Δυαδική λογική**
- **Πύλες AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR**
- **Κύκλωμα συνδυαστικής λογικής από λογική συνάρτηση**

Ορισμός σήματος

- **Το σήμα είναι μια φυσική ποσότητα η οποία μεταβάλλεται με το χρόνο ή με το χώρο (ή και τα δυο).**
- **Τα σήματα χρησιμοποιούνται για την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ δύο σημείων.**
- **<u>Παραδείγματα</u>:**
  -- Σήματα καπνού από τους Ινδιάνους
  -- Ομιλία (μπορεί να αναπαρασταθεί με ηλεκτρικό σήμα)
  -- ραδιοκύματα
  -- ηλεκτρισμός
- **<u>Μερικές κατηγορίες σημάτων</u>:**
  -- Περιοδικά ή απεριοδικά
  -- Ψηφιακά ή αναλογικά

Περιοδικό σήμα (periodic signal)

- **<u>Ορισμός</u>: Ένα σήμα *f*(*t*) είναι περιοδικό αν,**

$$f(t) = f(t + nT),$$

για κάθε χρόνο *t* και για όλους τους ακέραιους αριθμούς *n*.

Πιο απλά, ένα σήμα είναι περιοδικό όταν επαναλαμβάνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα.

<u>Παραδείγματα περιοδικών σημάτων</u>:

-- Ημιτονοειδές σήμα

-- Τετραγωνικό σήμα

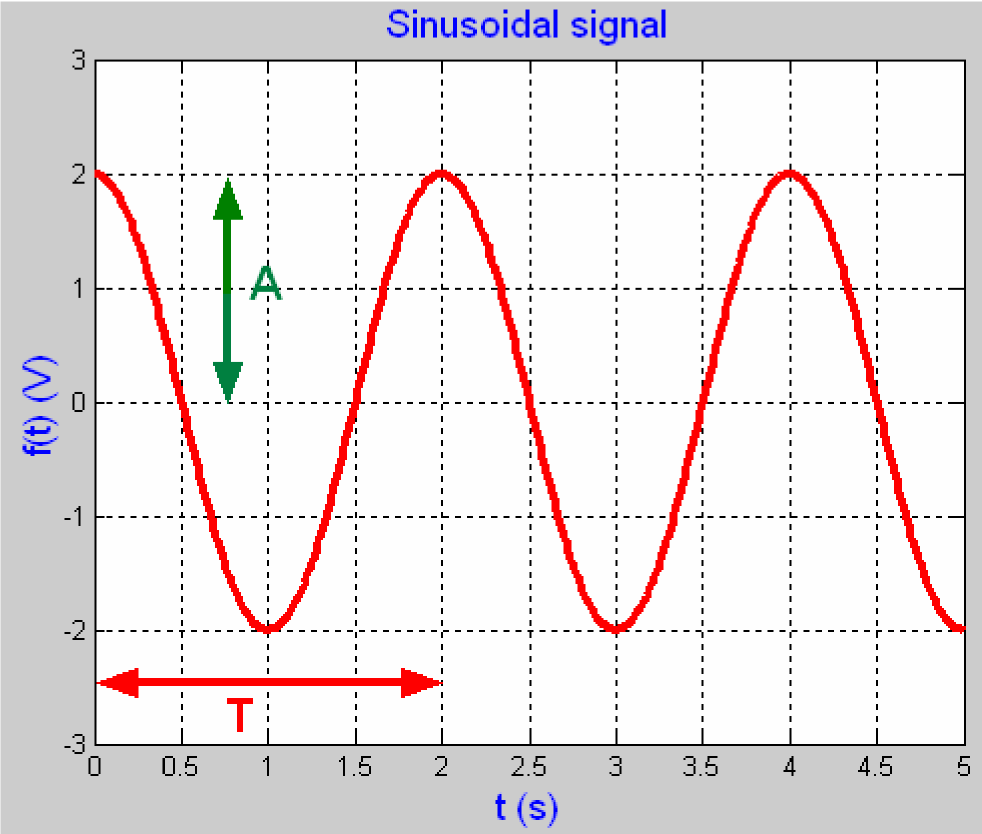
<u>Παραδείγματα απεριοδικών σημάτων</u>:

-- Ομιλία

-- Παλμοί

Ημιτονοειδές σήμα (sinusoidal signal)

$$f(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$



- A: πλάτος (amplitude)
- f: συχνότητα (frequency)
- φ: φάση (phase)
- T (f=1/T): περίοδος (period)
- ω, $\omega=2\pi f$: γωνιακή συχνότητα (angular frequency)
- Στο παράδειγμα:

  A = 2 V

  T = 2 s

  f = 0.5 Hz

  ω = π rad/s

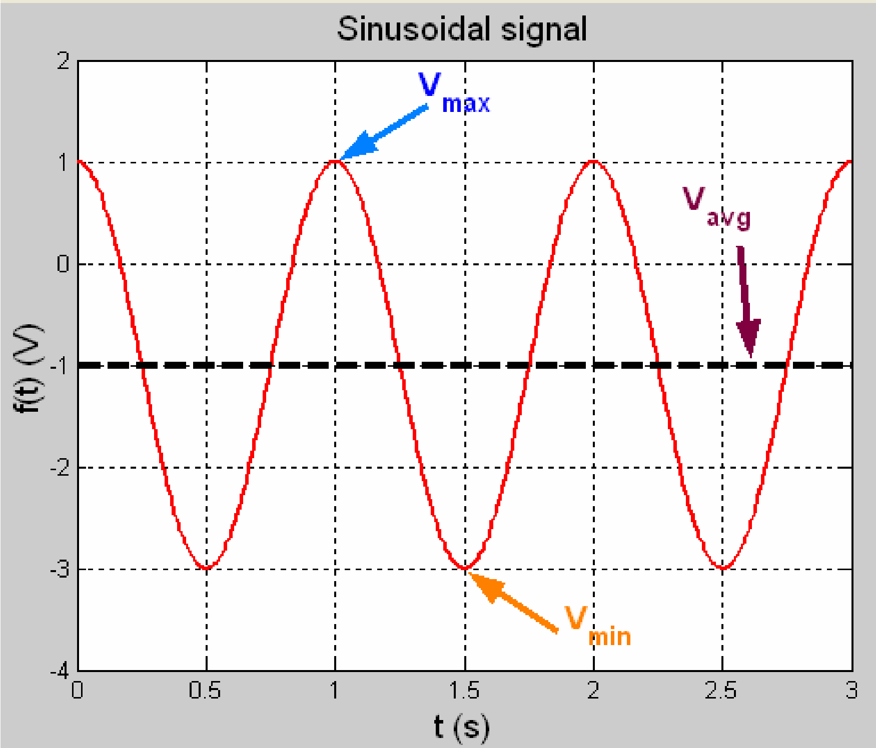
  φ = 0 rad

Παράμετροι σήματος

- Τιμή κορυφής ή κορυφοτιμή (peak value, V_p)
- Τιμή από κορυφή σε κορυφή ή διακορυφοτιμή (peak to peak value, V_{pp})
- Απόκλιση (DC offset)
- Μέση τιμή (average value, V_{avg})
- Ενεργός τιμή (root mean square value, rms, V_{rms})*
- Περίοδος (period, T)
- Συχνότητα (frequency, f)
- Φάση (phase, φ)

* Το “mean square value” μεταφράζεται ως μέση τετραγωνική τιμή

Παράδειγμα

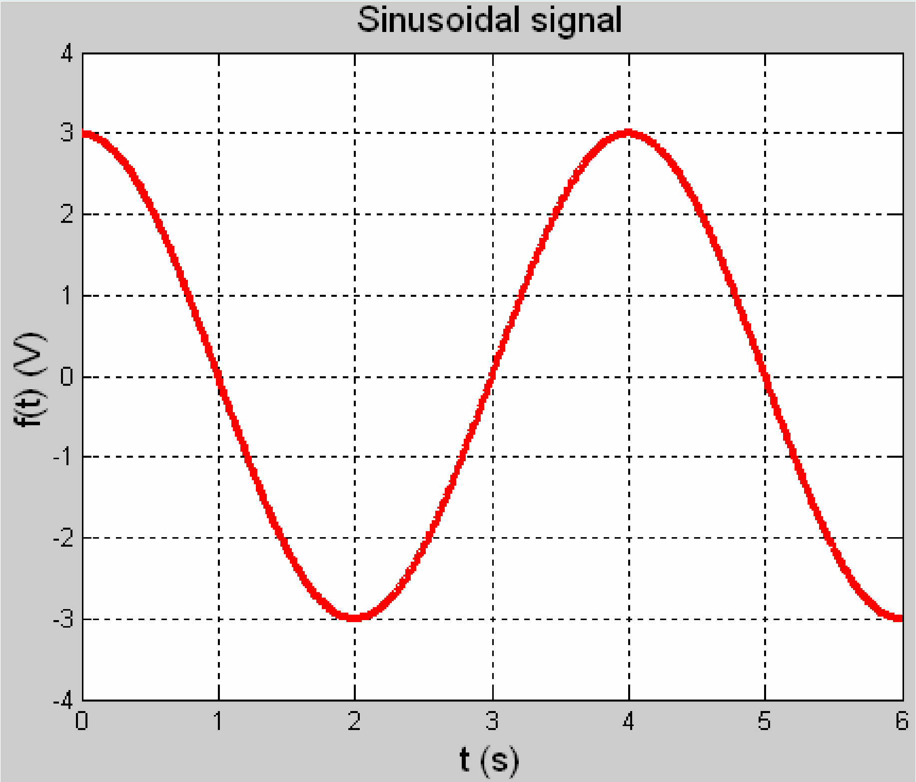


- V_{pp} = V_{max}-V_{min} = 1-(-3) = 4 V
- V_p = V_{pp}/2 = 4/2 = 2 V
- V_{avg} = (V_{max}+V_{min})/2 = (1+(-3))/2 = -1 V
- Απόκλιση = V_{avg} = -1 V

$$f(t) = A\cos(2\pi f t + \phi) + B$$

$$f(t) = 2\cos(2\pi \times 1 \times t) - 1$$

Παράδειγμα



Υπολογίστε τα ακόλουθα:

-- Τιμή από κορυφή σε κορυφή: $V_{pp} = V_{max} - V_{min} = 3\text{-}(-3) = 6$ V

-- Μέγιστη τιμή: $V_{max} = 3$ V

-- Περίοδος: $T = 4$ s

-- Συχνότητα: $f = 1/T = 0.25$ Hz

-- Μέση τιμή: $V_{avg} = 0$

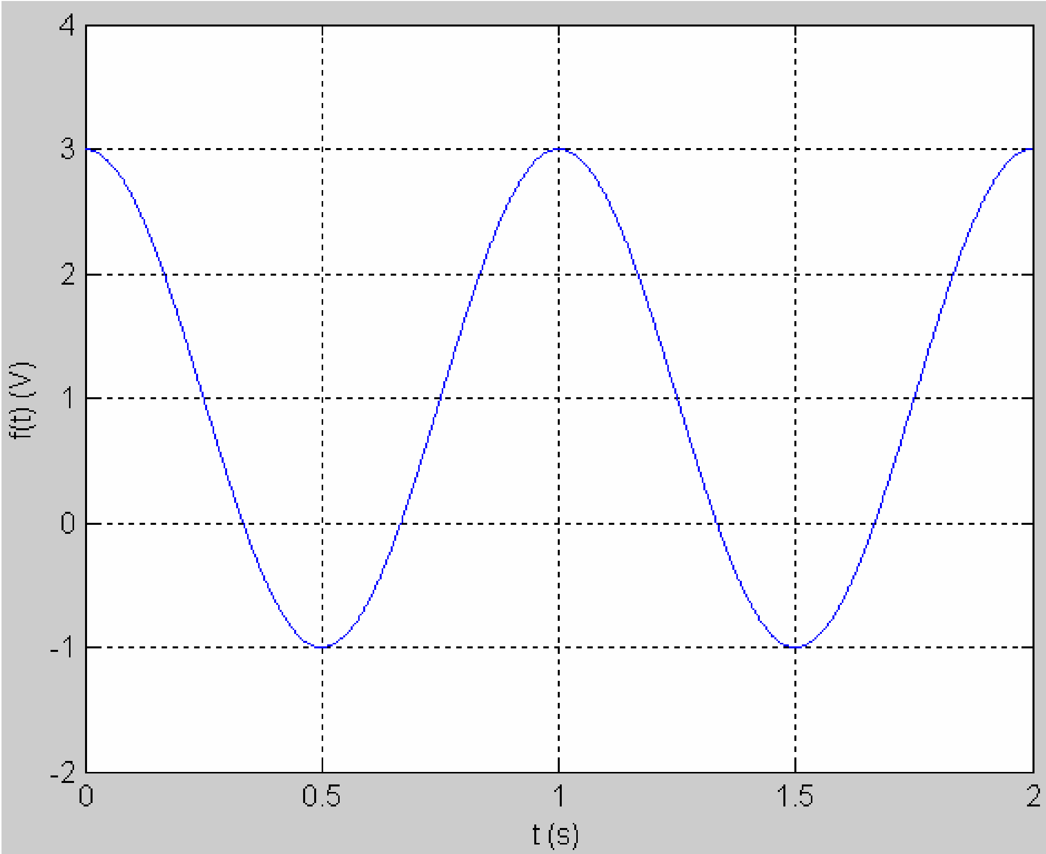
Παράδειγμα

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του συνημιτονοειδούς σήματος με τα πιο κάτω χαρακτηριστικά:

-- f = 1 Hz

-- V_{pp} = 4 V

-- Απόκλιση = 1 V



Μέση τιμή (average value)

- **Η μέση τιμή ενός σήματος *f*(*t*) ορίζεται ως:**

$$f_{avg} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

- **Για ένα περιοδικό σήμα με περίοδο *T*:**

$$f_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Ενεργός τιμή (root mean square value)

- **Η ενεργός τιμή ενός σήματος *f*(*t*) ορίζεται ως:**

$$f_{rms} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

- **Για ένα περιοδικό σήμα με περίοδο *T*:**

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$$

Παράδειγμα

- **Υπολογίστε την μέση τιμή του σήματος:**

$$v(t) = 5\cos(2\pi t)$$

- **Λύση:**

-- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 1 s (*f* = 1 Hz)

$$v_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{1}\int_0^1 5\cos(2\pi t)dt = [\frac{5}{2\pi}\sin(2\pi t)]_0^1$$

$$= \frac{5}{2\pi}[\sin(2\pi) - \sin(0)]$$

$$\Rightarrow v_{avg} = 0$$

Σημείωση: Η ενεργός τιμή ενός ημιτονοειδούς σήματος (χωρίς απόκλιση) είναι ίση με A/√2 όπου A το πλάτος του σήματος. Σε αυτό το παράδειγμα, v_{rms} = 5/√2.

Παράδειγμα

- **Υπολογίστε την ενεργό τιμή του σήματος:**

$$v(t) = 3\cos(4\pi t) - 2$$

- **Λύση:**

-- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 0.5 s (*f* = 2 Hz)

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{0.5}\int_0^{0.5}(3\cos(4\pi t) - 2)^2 dt} = \sqrt{2\int_0^{0.5}(9\cos^2(4\pi t) - 12\cos(4\pi t) + 4)dt}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\int_0^{0.5}(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\cos(8\pi t) - 12\cos(4\pi t) + 4)dt} = \sqrt{2}\sqrt{[\frac{17}{2}t + \frac{9}{2}\frac{1}{8\pi}\sin(8\pi t) - 12\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t)]_0^{0.5}}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{[\frac{17}{4} + \frac{9}{16\pi}\sin(4\pi) - \frac{3}{\pi}\sin(2\pi)] - [0 + 0 - 0]} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$\Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

Καθυστέρηση φάσης (phase lag)

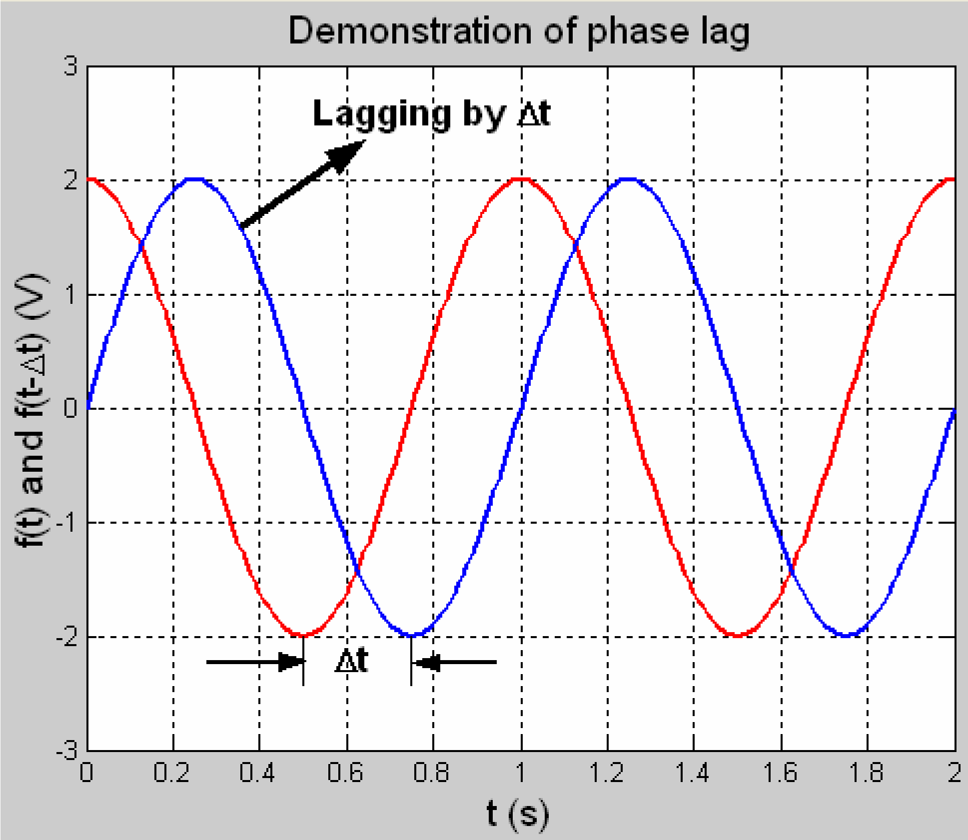
- Χρονική μετατόπιση του σήματος προς τα δεξιά

$$\varphi = 2\pi f \Delta t$$

- Γι' αυτό το παράδειγμα:

$$\varphi = 2\pi f \Delta t = 2\pi \times 1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

- Υπάρχει καθυστέρηση φάσης 90°



Προήγηση φάσης (phase lead)

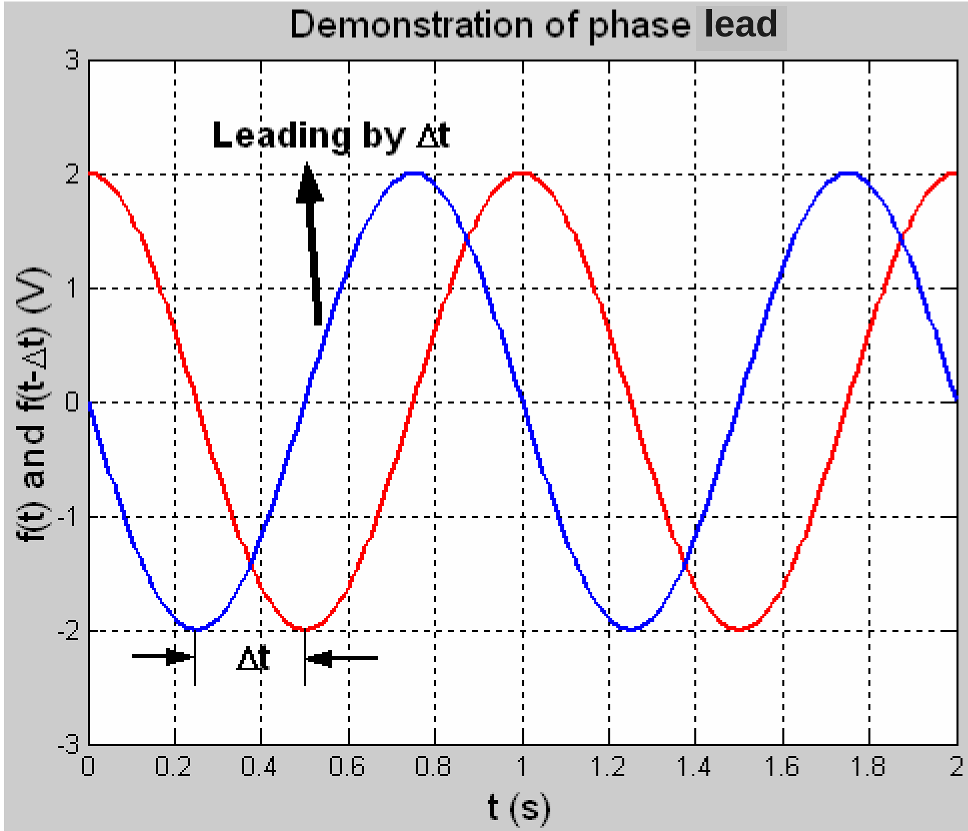
- Χρονική μετατόπιση του σήματος προς τα αριστερά

$$\varphi = 2\pi f \Delta t$$

- Γι' αυτό το παράδειγμα:

$$\varphi = 2\pi f \Delta t = 2\pi \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

- Υπάρχει προήγηση φάσης 90°

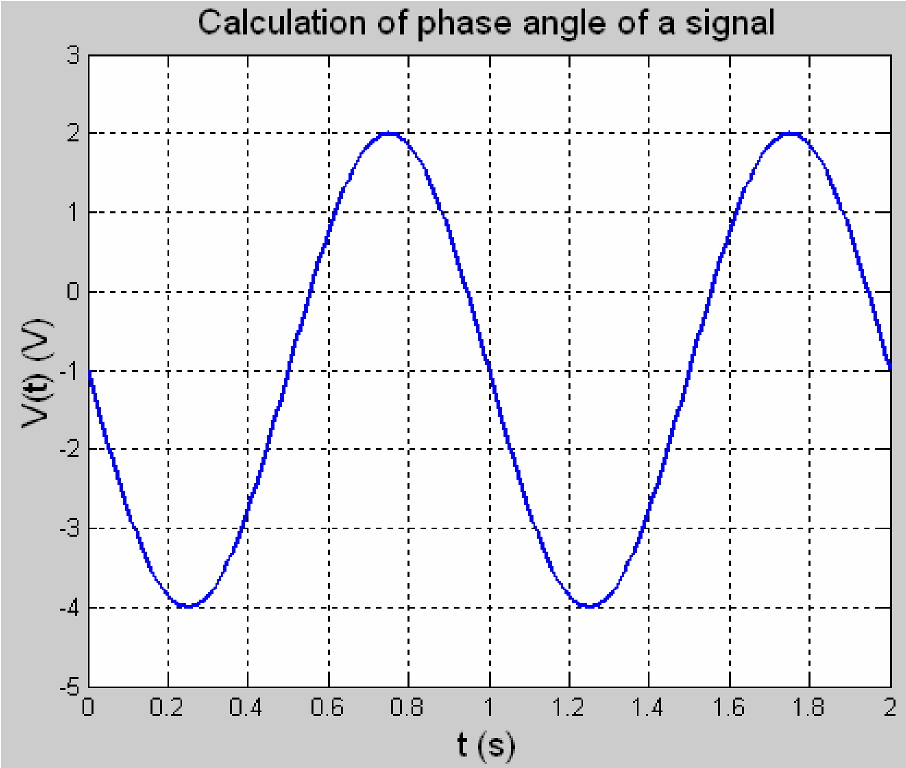


Υπολογισμός φάσης σήματος

Πρώτα πρέπει να βρούμε την εξίσωση του σήματος.
Γενική μορφή:

$$v(t) = A\cos(2\pi ft + \phi) + B$$

(Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το sin αντί του cos).
Από την γραφική παράσταση μπορούμε να υπολογίσουμε τις ακόλουθες παραμέτρους του σήματος:



$$A = V_p = (V_{\max} - V_{\min})/2 = 3\,\mathrm{V}$$

$$f = \frac{1}{T} = 1\,\mathrm{Hz}$$

$$B = V_{avg} = (V_{\max} + V_{\min})/2 = -1\,\mathrm{V}$$

$$\Rightarrow v(t) = 3\cos(2\pi t + \varphi) - 1$$

Από τη γραφική παράσταση, σε χρόνο $t = 0$, $v(0) = -1$ V

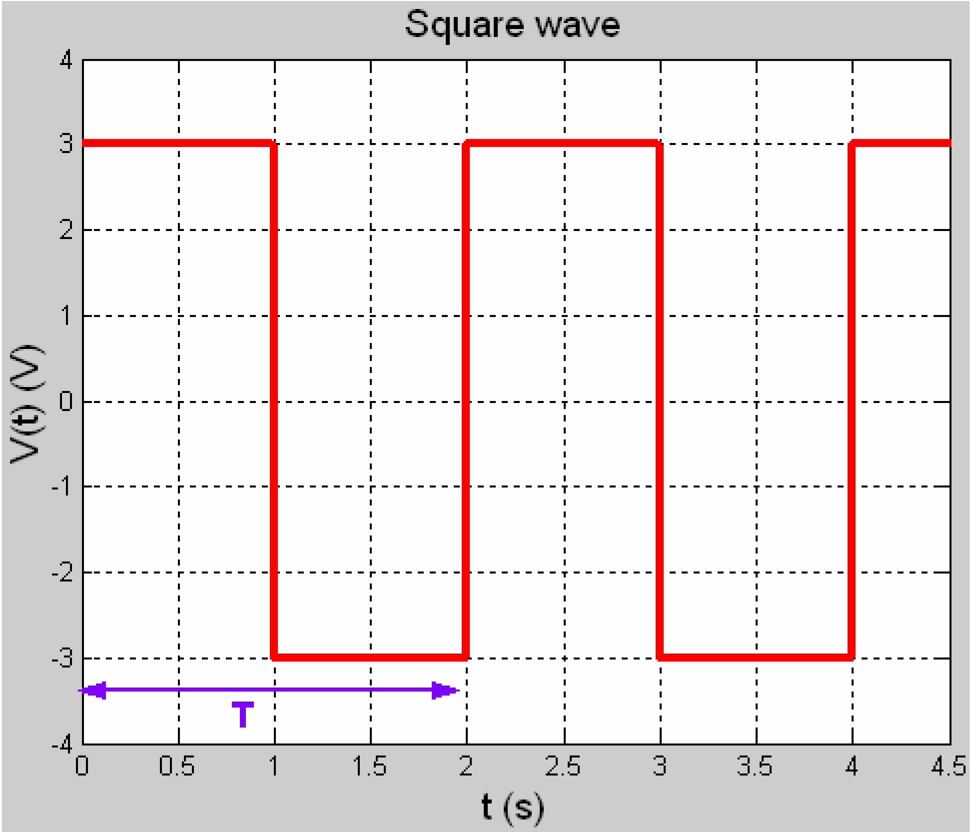
$$\Rightarrow -1 = 3\cos\varphi - 1$$

$$\Rightarrow 3\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$$

Τετραγωνικό σήμα (square wave)

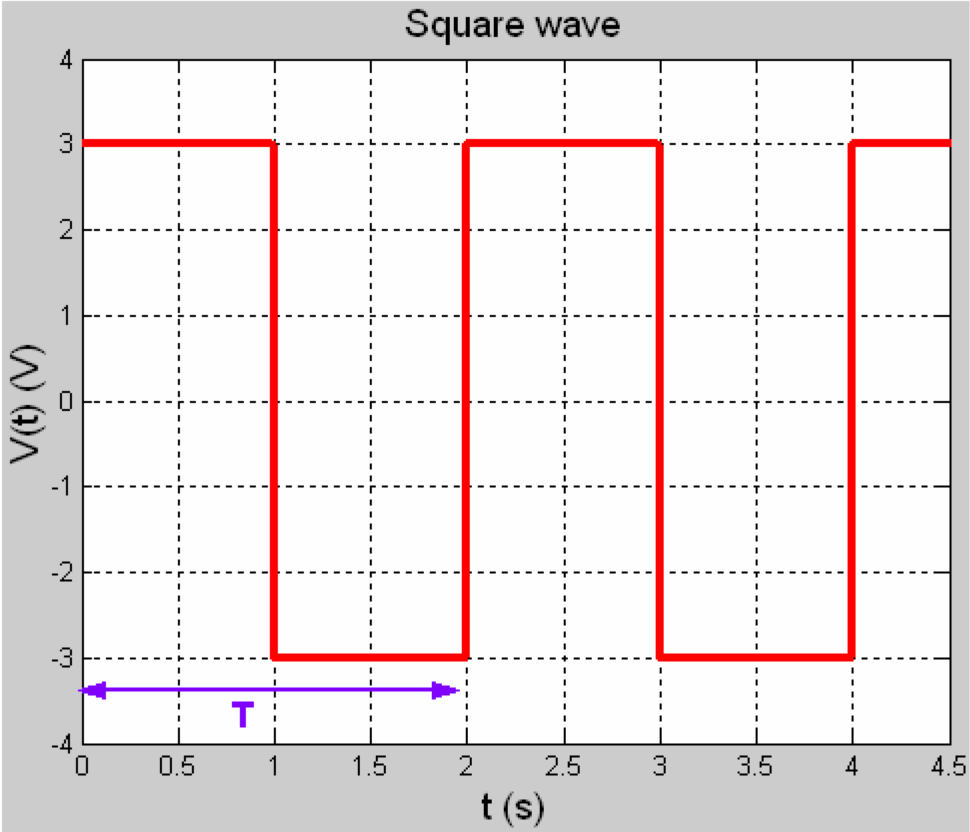
- **Τα τετραγωνικά σήματα συναντώνται σε ψηφιακές εφαρμογές.**
- **Το σήμα μεταβάλλεται από τη μέγιστη του τιμή στην ελάχιστη σε χρόνο μηδέν (ιδανική περίπτωση).**
- **Σε αυτό το παράδειγμα η εξίσωση του σήματος δίνεται από τη σχέση:**

$$v(t) = \begin{cases} 3 \ \text{για}\ 0 < t < T/2 \\ -3 \ \text{για}\ T/2 < t < T \end{cases}$$



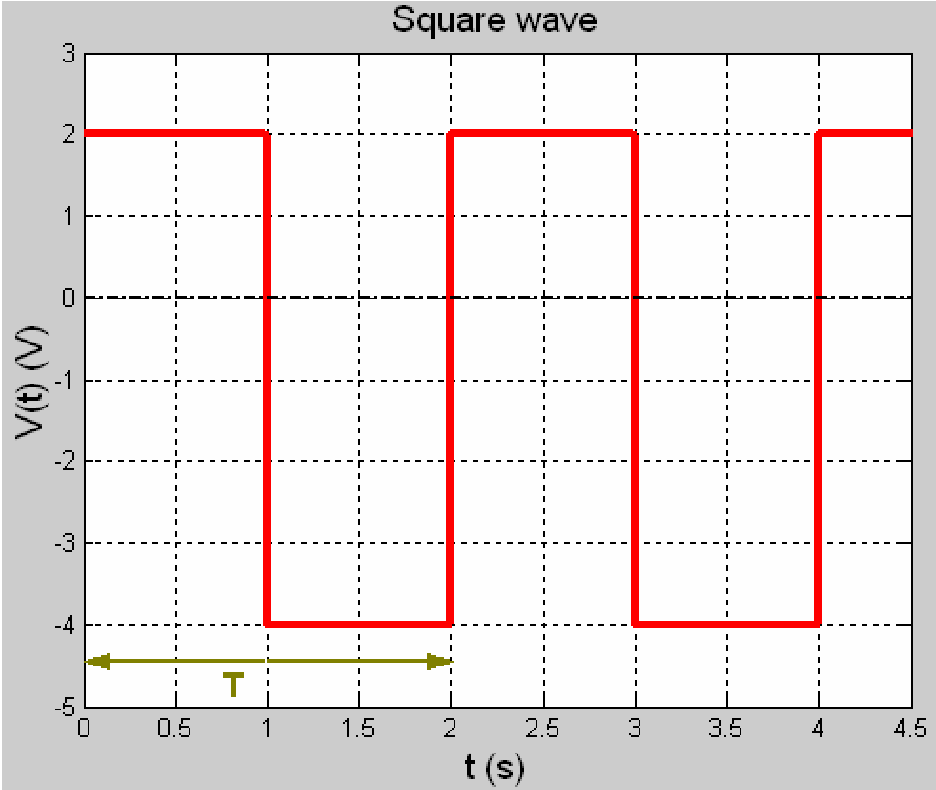
Παράδειγμα

- $V_{max} = 3$ V
- $V_{min} = -3$ V
- $V_{pp} = 3 - (-3) = 6$ V
- $V_p = 3$ V
- $T = 2$ s
- $f = 0.5$ Hz
- $V_{avg} = 0$ V
- Απόκλιση = 0 V



Παράδειγμα

- $V_{max} = 2$ V
- $V_{min} = -4$ V
- $V_{pp} = 2 - (-4) = 6$ V
- $V_p = 3$ V
- $T = 2$ s
- $f = 0.5$ Hz



$$V_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 2dt + \int_1^2 -4dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\{[2t]_0^1 + [-4t]_1^2\} = \frac{1}{2}[(2-0)+(-8+4)]$$

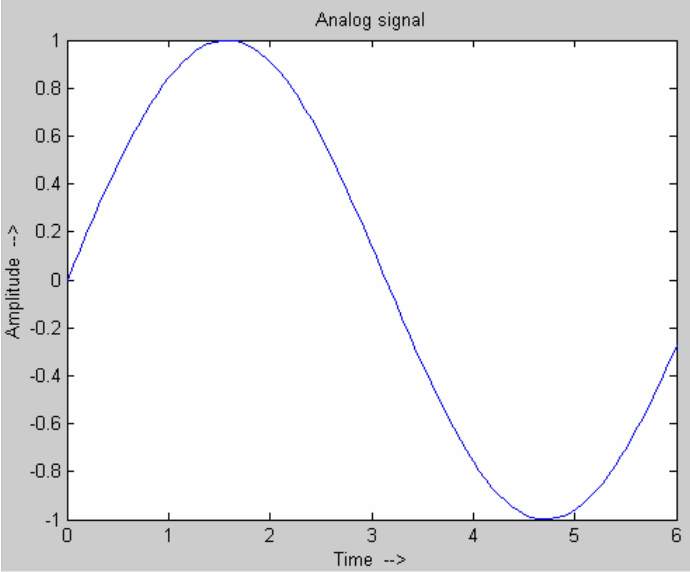
$$\Rightarrow v_{avg} = -1\,\text{V}$$

Αναλογικά και ψηφιακά σήματα

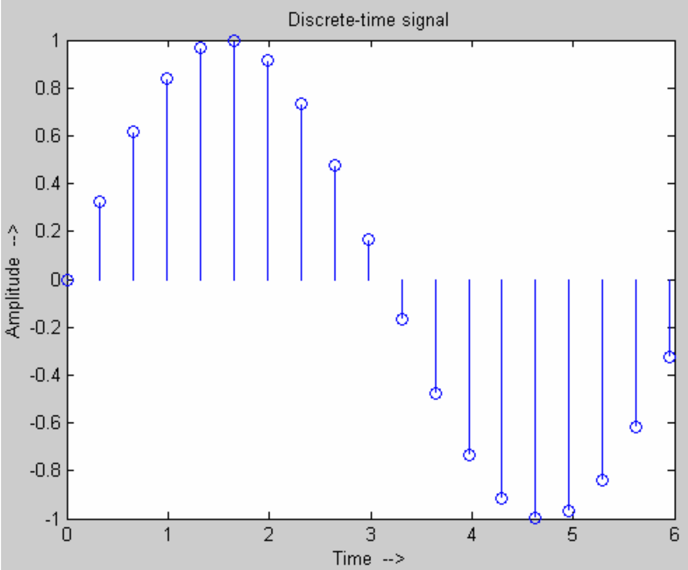
- **Αναλογικό σήμα (analog signal)**: συνεχής συνάρτηση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξαρτημένη μεταβλητή (π.χ. χρόνος και πλάτος) παίρνουν συνεχείς τιμές. Τα περισσότερα φυσικά σήματα είναι αναλογικά (π.χ. ομιλία, ηλεκτρισμός)
- **Σήμα διακριτού χρόνου (discrete-time signal)**: συνάρτηση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. χρόνος) παίρνει μόνο ορισμένες (διακριτές) τιμές και η εξαρτημένη μεταβλητή (π.χ. πλάτος) παίρνει συνεχείς τιμές. Δημιουργούνται συνήθως από τη δειγματοληψία αναλογικών σημάτων.
- **Ψηφιακό σήμα (digital signal)**: συνάρτηση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνουν μόνο ορισμένες (διακριτές) τιμές. Δημιουργούνται συνήθως από τη δειγματοληψία και την κβαντοποίηση αναλογικών σημάτων.

Παραδείγματα

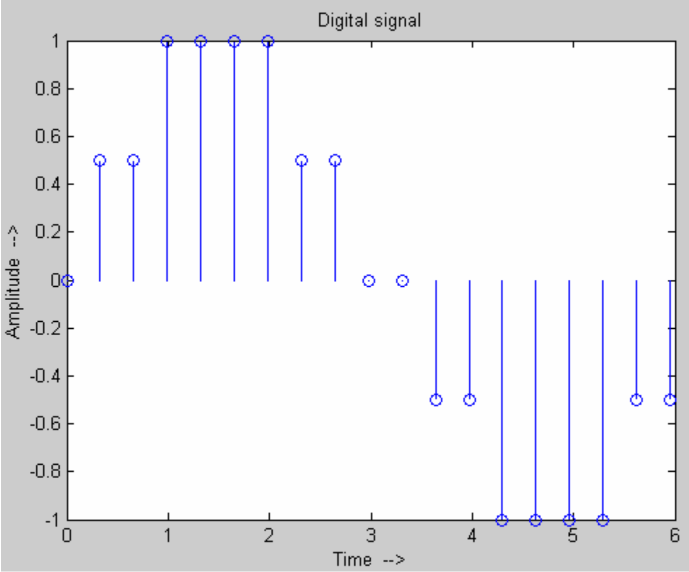
Αναλογικό σήμα



Σήμα διακριτού χρόνου

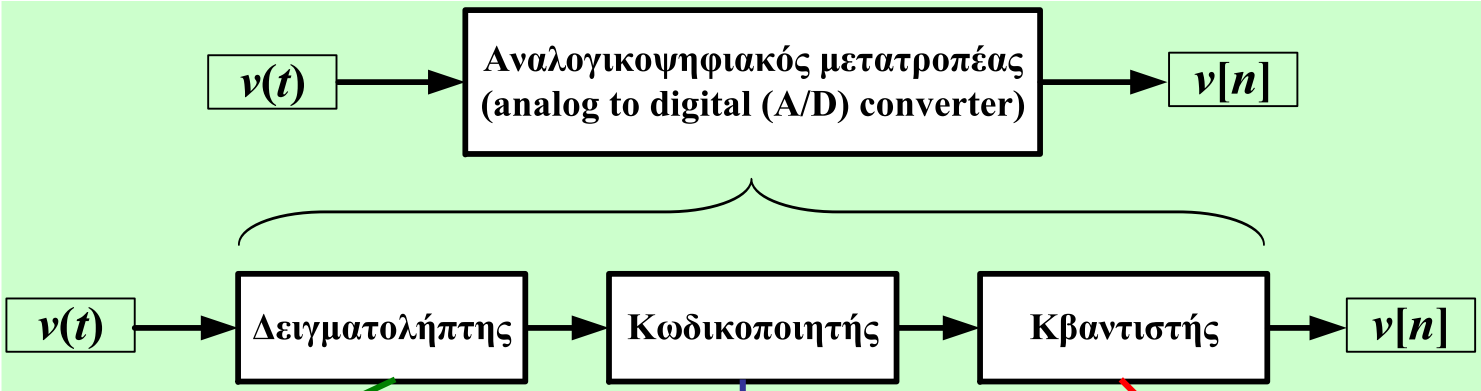


Ψηφιακό σήμα



Μετατροπή σήματος

Ένα αναλογικό σήμα μπορεί να μετατραπεί σε ψηφιακό (και αντίστροφα).



Επιλέγουμε ένα αριθμό διακριτών τιμών από το σύνολο των άπειρων τιμών του σήματος

Βρίσκουμε την πλησιέστερη στάθμη κάθε τιμής που προέκυψε από τη δειγματοληψία

Επιλέγονται οι στάθμες με τις οποίες θέλουμε να αντιπροσωπεύσουμε το σήμα (ανάλογα με την ακρίβεια που θέλουμε)

Ανάγκη μετατροπής σημάτων

- Οι υπολογιστές χειρίζονται δεδομένα που βρίσκονται σε ψηφιακή μορφή (δηλαδή που αναπαρίστανται με ακολουθίες των ψηφίων 0 και 1).
- Γι’ αυτό υπάρχει η ανάγκη μετατροπής των δεδομένων (ήχου, εικόνας) από αναλογικά σε ψηφιακά για να γίνει η μεταφορά τους ή η επεξεργασία τους.
- Για να παρουσιαστούν στην οθόνη του υπολογιστή πρέπει να μετατραπούν από ψηφιακά σε αναλογικά, χρησιμοποιώντας την αντίστροφη διαδικασία (ψηφιοαναλογική μετατροπή (digital to analog (D/A) conversion)).

Πλεονεκτήματα των ψηφιακών έναντι των αναλογικών σημάτων

-- Ομοιομορφία (όλα τα είδη πληροφορίας μπορούν να μετατραπούν σε ψηφιακή μορφή και να επεξεργαστούν με τον ίδιο τρόπο και το ίδιο υλικό)

-- Λιγότερο ευαίσθητα στον θόρυβο

-- Πιο εύκολη κρυπτογράφηση πληροφορίας

-- Πολυμεσικές (multimedia) πηγές (φωνή, βίντεο, δεδομένα) μπορούν να συνυπάρξουν και να μεταδοθούν διαμέσου ενός κοινού ψηφιακού συστήματος

-- Μπορεί να υλοποιηθεί διαδικασία ανίχνευσης και διόρθωσης λαθών

-- Χαμηλό κόστος

Μειονεκτήματα των ψηφιακών έναντι των αναλογικών σημάτων

-- Παραμόρφωση του σήματος λόγω της διαδικασίας δειγματοληψίας και κβαντοποίησης.

-- Χρειάζονται μεγαλύτερο εύρος ζώνης.

Δειγματοληψία (sampling)

- **Η δειγματοληψία είναι το πρώτο στάδιο της μετατροπής ενός σήματος από αναλογικό σε ψηφιακό.**
- **Από το σύνολο των άπειρων τιμών ενός αναλογικού σήματος επιλέγουμε ένα αριθμό δειγμάτων (samples) τα οποία λαμβάνονται σε τακτά χρονικά διαστήματα *T*.**
- **Ο χρόνος *T* είναι η περίοδος της δειγματοληψίας (sampling period).**

$$v_{\delta}[n] = v(nT)$$ **(δ: δείγμα)**

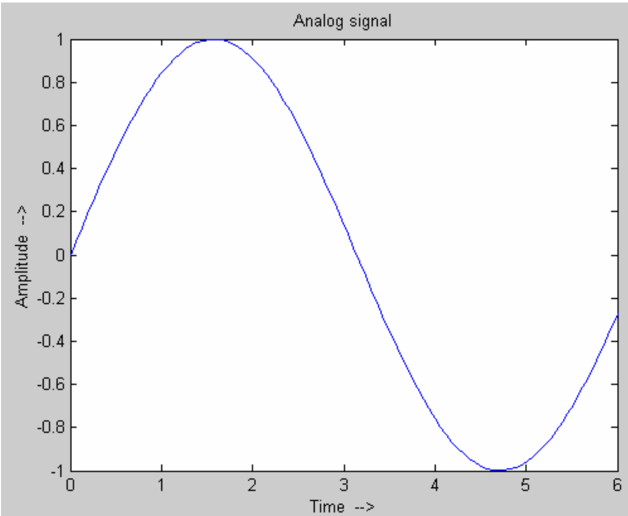
- **Οι τιμές του $v_{\delta}[n]$ είναι αναλογικές.**
- **Η συχνότητα ή ο ρυθμός δειγματοληψίας (sampling rate) είναι**

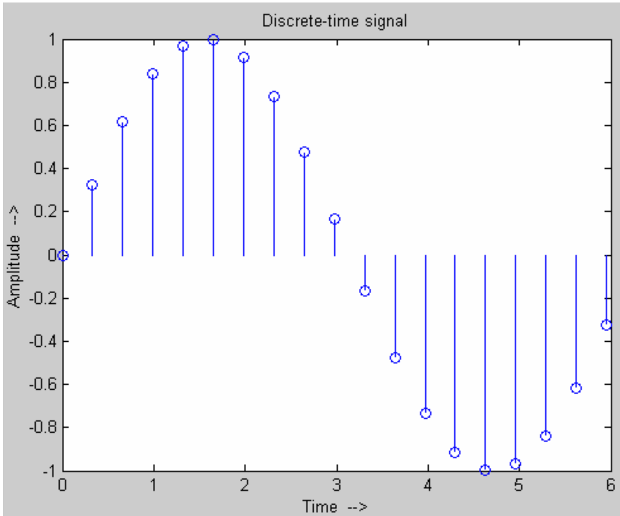
$$f_s = 1/T$$

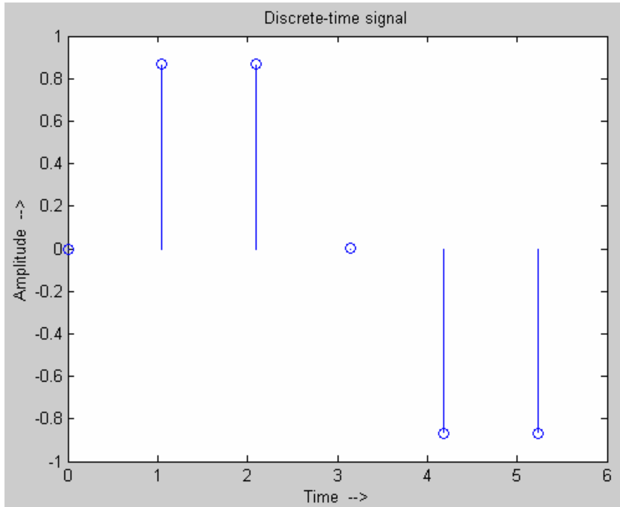
Δειγματοληψία (sampling)

- Αναγκαίο κακό: Στη δειγματοληψία χάνονται ορισμένες πληροφορίες του σήματος.
- Η δειγματοληψία πρέπει να γίνεται με τέτοιο ρυθμό ούτως ώστε το σήμα να μπορεί να αναγνωριστεί από τα δείγματα.

Αυτό εξαρτάται από το είδος και τη μορφή του σήματος.







Κωδικοποίηση (encoding)

- **Επιλέγονται οι στάθμες με τις οποίες θέλουμε να αντιπροσωπεύσουμε το σήμα.**
- **Αφού επιλεχθούν οι στάθμες, αντιστοιχίζεται σε κάθε μια από αυτές μια λέξη.**
- **Μια λέξη μήκους *n* bits μπορεί να περιγράψει 2^n στάθμες.**
- **Η επιλογή του αριθμού των σταθμών γίνεται ανάλογα με την ακρίβεια που επιθυμούμε (συμβιβασμός μεταξύ ακρίβειας αναπαράστασης του σήματος, χώρου φύλαξης και χρόνου επεξεργασίας.**

Κβαντοποίηση (quantizing)

- **Με την κβαντοποίηση βρίσκουμε την πλησιέστερη στάθμη κάθε τιμής που προέκυψε από τη δειγματοληψία.**
- **Μετά από αυτό το σημείο το σήμα είναι πλέον ψηφιακό.**
- **Με την κβαντοποίηση περιορίζουμε το πεδίο τιμών σε ένα σύνολο πεπερασμένου αριθμού τιμών *M*.**
- **Η ευκρίνεια του σήματος καθορίζεται από τον αριθμό *M*.**
- **Οι τιμές αυτές αναπαρίστανται με μια σειρά δυαδικών αριθμών 1 και 0.**

Παράδειγμα (1)

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της τάσης

$$v = 3\sin(2\pi t)$$

χρησιμοποιώντας το λογισμικό MATLAB. Πόσα δείγματα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ανά δευτερόλεπτο;

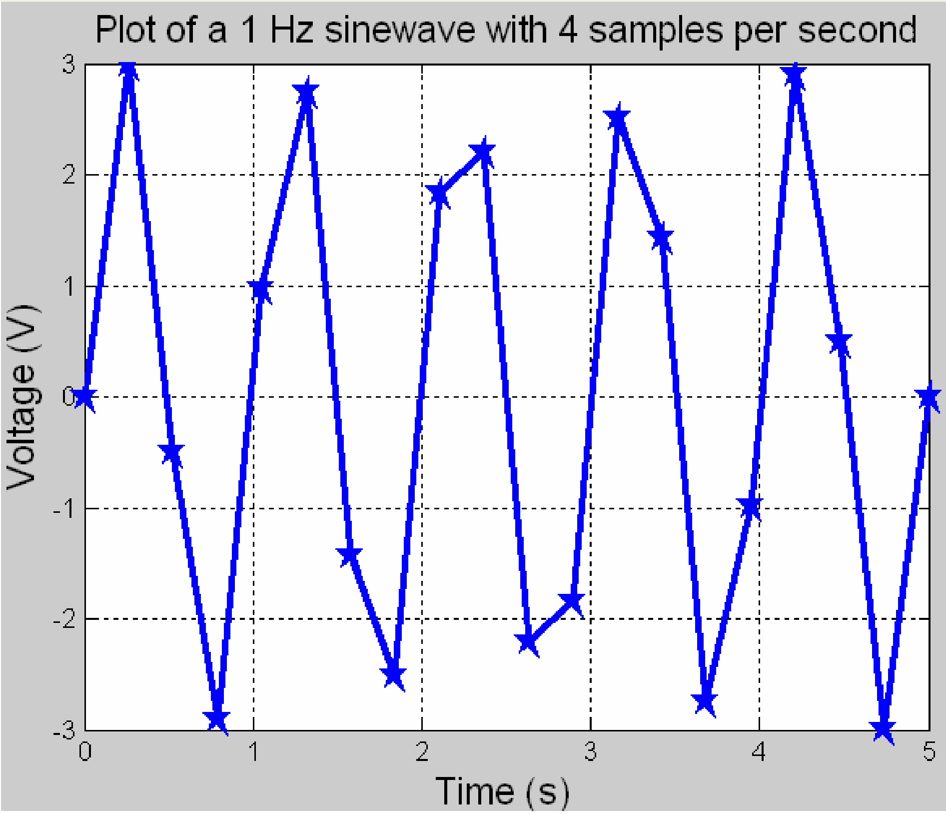
Πρώτα πρέπει να ορίσουμε το διάνυσμα *t*. Έστω ότι θα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση από 0 μέχρι 5 δευτερόλεπτα.

***t* = linspace(0, 5, x)**

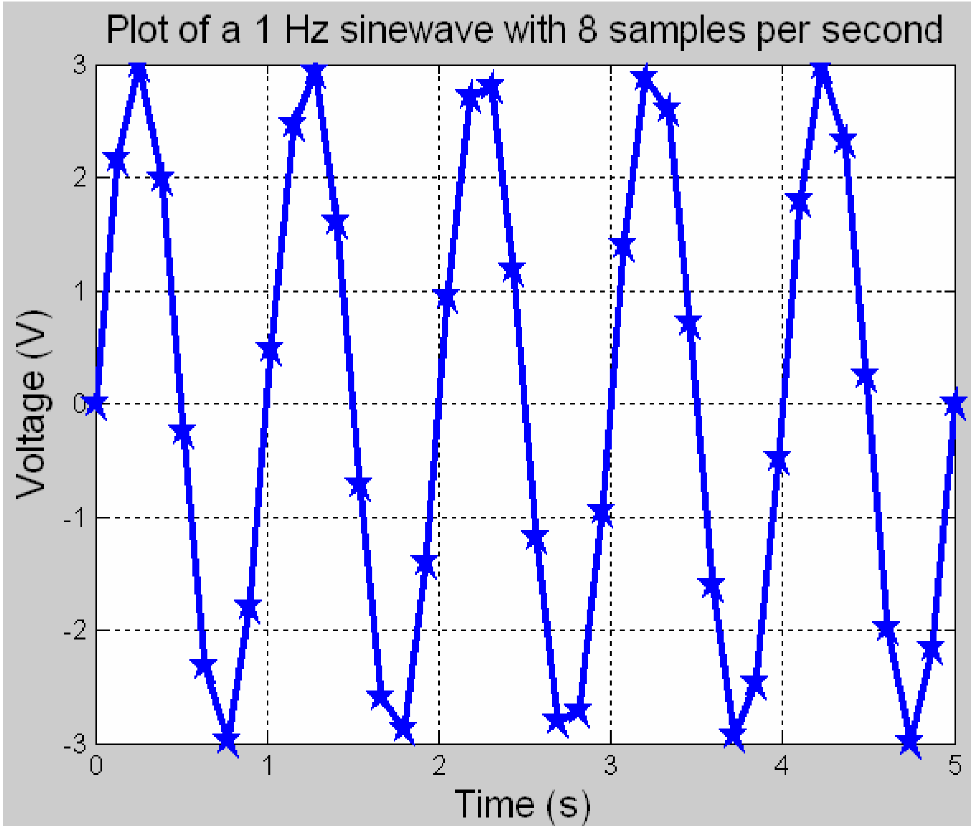
όπου x ο αριθμός των σημείων μεταξύ 0 και 5.

Παράδειγμα (2)

t **= linspace(0, 5, 20)**

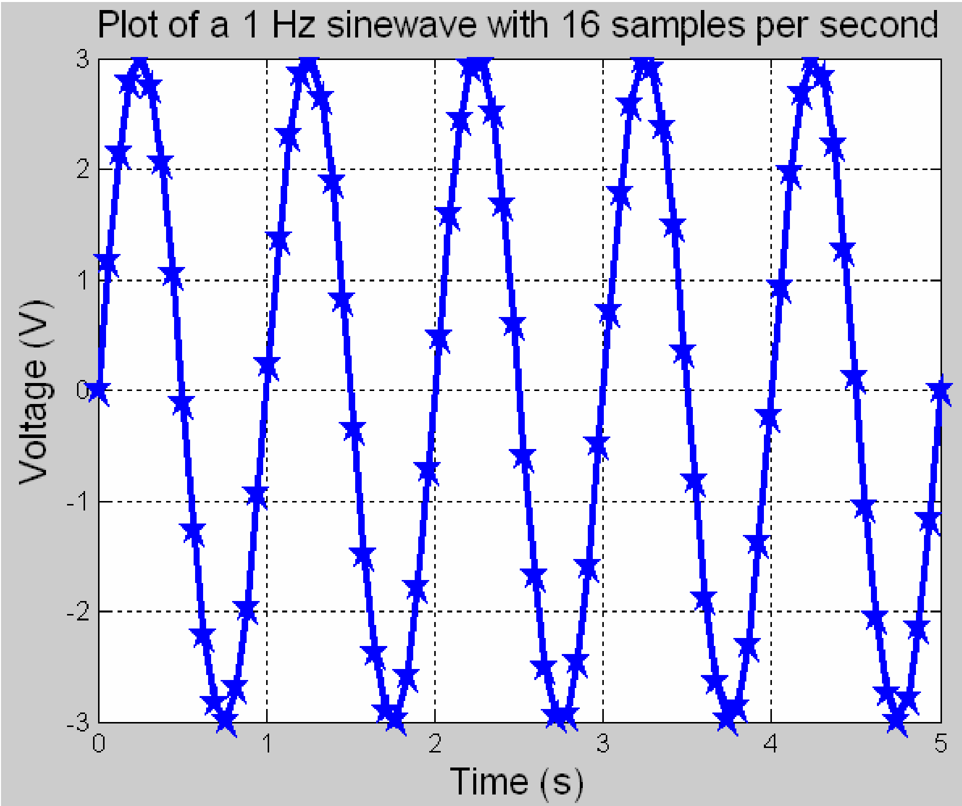


t **= linspace(0, 5, 40)**

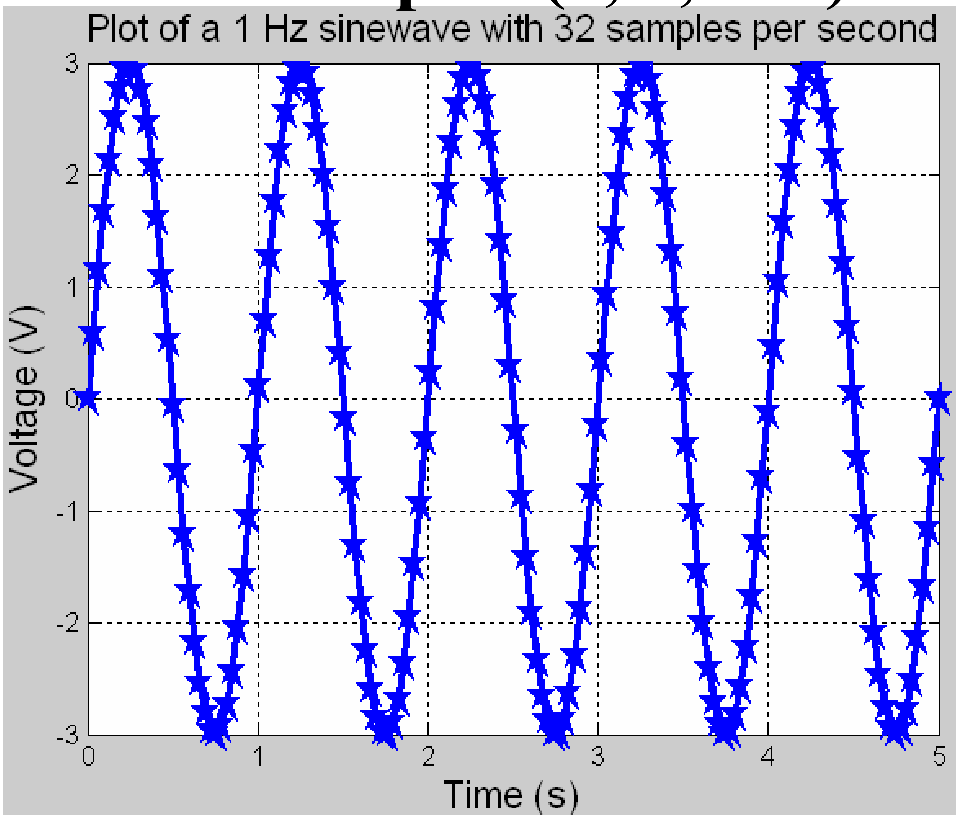


Παράδειγμα (3)

***t* = linspace(0, 5, 80)**



***t* = linspace(0, 5, 160)**

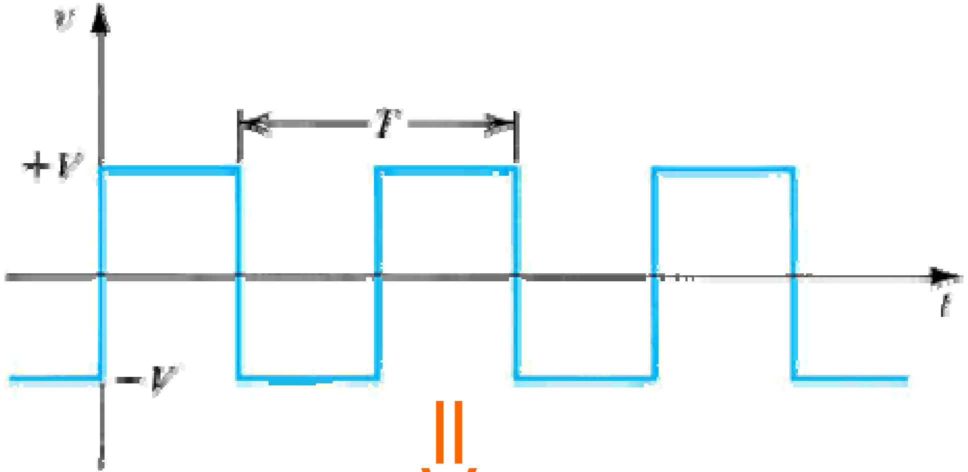


ΦΑΣΜΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

- **Για να λάβουμε το φάσμα συχνοτήτων (frequency spectrum) ενός σήματος, μετασχηματίζουμε το σήμα (μέσω των σειρών Fourier και του μετασχηματισμού Fourier) σε ένα άθροισμα ημιτόνων (διαφορετικής συχνότητας και πλάτους).**

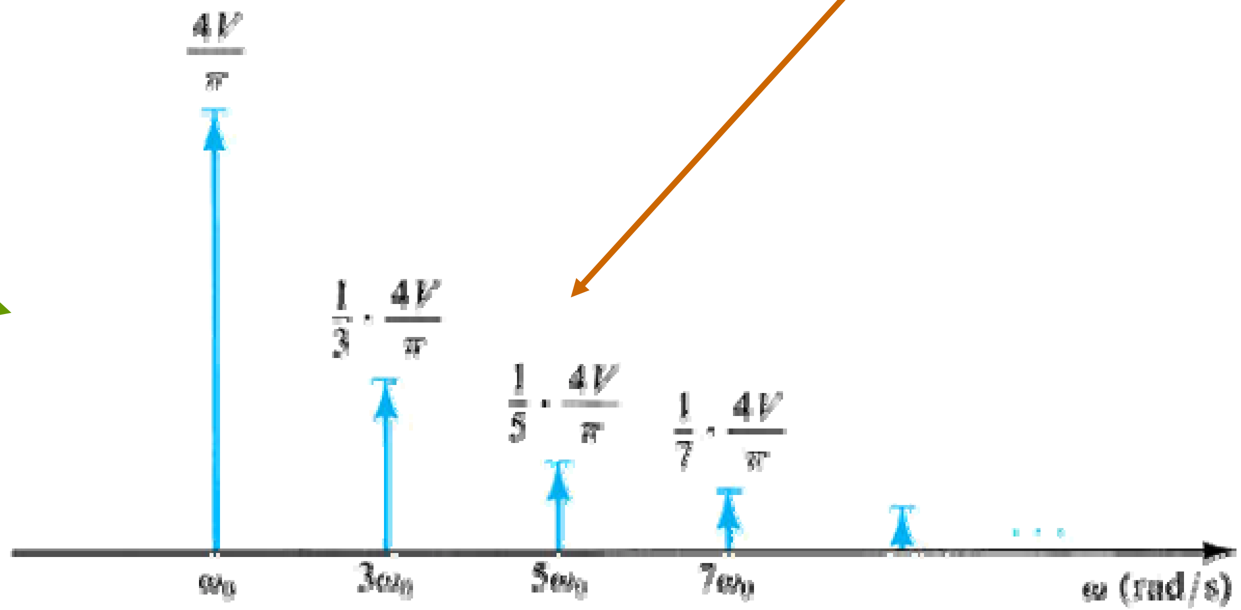
- **Το φάσμα συχνοτήτων είναι η γραφική παράσταση του πλάτους κάθε ημιτόνου συναρτήσει της συχνότητας.**

ΦΑΣΜΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$v(t)=\frac{4V}{\pi}(\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\ldots)$$

Φάσμα συχνοτήτων



Συστήματα αρίθμησης

- Υπάρχουν διάφορα συστήματα αρίθμησης.
- Όλα τα συστήματα έχουν μια ‘βάση’.
- Τα πιο κοινά συστήματα είναι το δεκαδικό και αυτά που έχουν ως βάση δυνάμεις του δύο.
- Για κάθε σύστημα υπάρχουν αριθμητικές πράξεις (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).
- Μπορεί να γίνει μετατροπή από ένα σύστημα στο άλλο (αλλαγή βάσης).

Συστήματα αρίθμησης

- **<u>Δεκαδικό σύστημα</u>**
  Βάση: 10, Ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- **<u>Δυαδικό σύστημα</u>**
  Βάση: 2, Ψηφία: 0, 1

- **<u>Οκταδικό σύστημα</u>**
  Βάση: 8, Ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

- **<u>Δεκαεξαδικό σύστημα</u>**
  Βάση: 16, Ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Δεκαδικό σύστημα

- **Βάση: 10**
- **Χρησιμοποιεί 10 ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**
- **Για τον υπολογισμό της τιμής ενός αριθμού, πολλαπλασιάζουμε το κάθε ψηφίο με τον αριθμό που αντιστοιχεί στη θέση που βρίσκεται το κάθε ψηφίο.**
- **Παράδειγμα:**

$$(3252,36)_{10} = 3x10^{3} + 2x10^{2} + 5x10^{1} + 2x10^{0} + 3x10^{-1} + 6x10^{-2}$$

Γενική μορφή αριθμητικών συστημάτων

- **Βάση:** ***r***
- **Χρησιμοποιεί** ***r*** **ψηφία: 0, …,** ***r*****-1**
- **Παράδειγμα:**

$$(N)_r = (A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1 A_0 A_{-1}A_{-2}\ldots A_{-m+1}A_{-m})_r$$

$$(N)_{10} = A_{n-1}\times 10^{n-1} + A_{n-2}\times 10^{n-2} + \ldots + A_1\times 10^{1} + A_0\times 10^{0} +$$
$$A_{-1}\times 10^{-1} + A_{-2}\times 10^{-2} + \ldots + A_{-m+1}\times 10^{-m+1} + A_{-m}\times 10^{-m}$$

Most Significant Bit (MSB)

Least Significant Bit (LSB)

Δυαδικό σύστημα

- **Βάση: 2**
- **Χρησιμοποιεί δύο ψηφία: 0, 1**
- **Παραδείγματα:**

$$
\begin{aligned}
(1001,1)_2 &= 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 1x2^{-1} \\
&= 8 + 0 + 0 + 1 + 0.5 \\
&= (9.5)_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(110101,01)_2 &= 1x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 + 0x2^{-1} + 1x2^{-2} \\
&= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 \\
&= (53.25)_{10}
\end{aligned}
$$

Λόγοι χρήσης δυαδικού συστήματος

Υπάρχουν μόνο δύο επίπεδα (0 και 1).

-- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν ηλεκτρονικά κυκλώματα για να αναπαρασταθούν.
Τα ηλεκτρονικά κυκλώματα μπορούν να είναι σε μια από δύο καταστάσεις:
◊ Ανοικτό ή κλειστό (open or closed)
◊ Αληθές ή ψευδές (true or false)
◊ HIGH or LOW

-- Είναι πιο εύκολη η αποθήκευση και επεξεργασία δεδομένων σε ψηφιακή μορφή.

Αντιστοιχία επιπέδων

Οι δύο δυαδικές τιμές ενός ψηφιακού σήματος αναπαρίστανται από διαστήματα τιμών τάσεως.
HIGH (1) : Αν η τάση είναι μεγαλύτερη από ένα επίπεδο
LOW (0) : Αν η τάση είναι μικρότερη από ένα επίπεδο

Στα ψηφιακά κυκλώματα, το HIGH αντιπροσωπεύεται από τάση +5 V, ενώ το LOW από τάση 0 V.

Επειδή όμως στα πραγματικά κυκλώματα δεν μπορείς ποτέ να είσαι απόλυτος/η στις τιμές τάσεως (π.χ. λόγω πτώσης τάσεως στο κύκλωμα), χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα διαστήματα τιμών τάσεως:

Για κυκλώματα CMOS:	**LOW:**	**0 → +1.5 V**
	HIGH:	**+3.5 → +5 V**
Για κυκλώματα TTL:	**LOW:**	**0 → +0.8 V**
	HIGH:	**+2 → +5 V**

Μετατροπή αριθμών από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα

Παράδειγμα 1:

$$
\begin{aligned}
(11010011{,}01)_2 &= 1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} \\
&= 128 + 64 + 0 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 + 0.25 \\
&= (211.25)_{10}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2:

$$
\begin{aligned}
(1101001101100)_2 &= 1\times 2^{12} + 1\times 2^{11} + 0\times 2^{10} + 1\times 2^9 + 0\times 2^8 + 0\times 2^7 + 1\times 2^6 \\
&\quad + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 \\
&= 4096 + 2048 + 0 + 512 + 0 + 0 + 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 \\
&= (6764)_{10}
\end{aligned}
$$

Δυνάμεις του δύο

n	2^n	*n*	2^n	*n*	2^n
0	1	8	256	16	65 536
1	2	9	512	17	131 072
2	4	10	1024	18	262 144
3	8	11	2048	19	524 288
4	16	12	4096	20	1 048 576
5	32	13	8192	21	2 097 152
6	64	14	16 384	22	4 194 304
7	128	15	32 768	23	8 388 608

Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα Μέθοδος 1

Διαδικασία

(α) Διαίρεση του δεκαδικού αριθμού με το δύο.
(β) Καταγραφή του πηλίκου της διαίρεσης και του υπόλοιπου.
(γ) Διαίρεση του πηλίκου με το δύο.
(δ) Επανάληψη των (β) και (γ) έως ότου το πηλίκο είναι 0.
(ε) Σχηματισμός του δυαδικού αριθμού καταγράφοντας τα υπόλοιπα από το τέλος προς την αρχή.

Παράδειγμα

$(74)_{10} = (?)_2$

$74 \div 2 = 37$ και υπόλοιπο 0 → **LSB**

$37 \div 2 = 18$ και υπόλοιπο 1

$18 \div 2 = 9$ και υπόλοιπο 0

$9 \div 2 = 4$ και υπόλοιπο 1 ⟹ $(74)_{10} = (1001010)_2$

$4 \div 2 = 2$ και υπόλοιπο 0

$2 \div 2 = 1$ και υπόλοιπο 0

$1 \div 2 = 0$ και υπόλοιπο 1 → **MSB**

Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα
Μέθοδος 1

Παράδειγμα

$(3254)_{10} = (?)_2$

$3254 \div 2 = 1627$ και υπόλοιπο 0

$1627 \div 2 = 813$ και υπόλοιπο 1

$813 \div 2 = 406$ και υπόλοιπο 1

$406 \div 2 = 203$ και υπόλοιπο 0

$203 \div 2 = 101$ και υπόλοιπο 1

$101 \div 2 = 50$ και υπόλοιπο 1

$50 \div 2 = 25$ και υπόλοιπο 0

$25 \div 2 = 12$ και υπόλοιπο 1

$12 \div 2 = 6$ και υπόλοιπο 0

$6 \div 2 = 3$ και υπόλοιπο 0

$3 \div 2 = 1$ και υπόλοιπο 1

$1 \div 2 = 0$ και υπόλοιπο 1

$\Rightarrow (3254)_{10} = (110010110110)_2$

Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα Μέθοδος 1

Όταν ο αριθμός είναι μικρότερος από 1:

(α) <u>Πολλαπλασιασμός</u> του αριθμού με το δύο.

(β) Καταγραφή του ακέραιου αριθμού (0 ή 1)

(γ) Πολλαπλασιασμός του κλασματικού αριθμού με το δύο.

(δ) Επανάληψη των (β) και (γ) έως ότου το γινόμενο είναι 1.

(ε) Σχηματισμός του δυαδικού αριθμού καταγράφοντας τους ακεραίους αριθμούς σε κάθε στάδιο από την αρχή προς το τέλος.

<u>Παράδειγμα</u>

$$(0.125)_{10} = (?)_2$$

MSB

$0.125 \times 2 = 0.250$ ακέραιος : 0

$0.25 \times 2 = 0.50$ ακέραιος : 0 $\Rightarrow (0.125)_{10} = (0.001)_2$

$0.5 \times 2 = 1.0$ ακέραιος : 1 **LSB**

Αν έχουμε ένα αριθμό με ακέραιο και κλασματικό μέρος, τότε κάνουμε την μετατροπή του αριθμού ξεχωριστά στα δύο μέρη.

Παράδειγμα

$(353.45)_{10} = (?)_2$

Ακέραιο μέρος

$353 \div 2 = 176$ και υπόλοιπο 1

$176 \div 2 = 88$ και υπόλοιπο 0

$88 \div 2 = 44$ και υπόλοιπο 0

$44 \div 2 = 22$ και υπόλοιπο 0

$22 \div 2 = 11$ και υπόλοιπο 0

$11 \div 2 = 5$ και υπόλοιπο 1

$5 \div 2 = 2$ και υπόλοιπο 1

$2 \div 2 = 1$ και υπόλοιπο 0

$1 \div 2 = 0$ και υπόλοιπο 1

Δεκαδικό μέρος

$0.45 \times 2 = 0.9$ ακέραιος: 0

$0.9 \times 2 = 1.8$ ακέραιος: 1

$0.8 \times 2 = 1.6$ ακέραιος: 1

$0.6 \times 2 = 1.2$ ακέραιος: 1

$0.2 \times 2 = 0.4$ ακέραιος: 0

$0.4 \times 2 = 0.8$ ακέραιος: 0

$0.8 \times 2 = 1.6$ ακέραιος: 1

$0.6 \times 2 = 1.2$ ακέραιος: 1

Δεν συγκλίνει!

Σταματούμε μέχρι εδώ.

$\Rightarrow (353.45)_{10} = (101100001.01110011)_2$

Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα
Μέθοδος 2

<u>Διαδικασία</u>

(α) Γράψε όλες τις δυνάμεις του 2 που είναι ίσες ή μικρότερες από τον δεκαδικό αριθμό.

(β) Μπορούμε να αφαιρέσουμε την μεγαλύτερη δύναμη του 2 από τον αριθμό; Αν ναι, γράφουμε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης και σημειώνουμε 1 κάτω από τη δύναμη του δύο. Αν όχι σημειώνουμε 0 κάτω από τη δύναμη του δύο.

(γ) Προχωρούμε στην επόμενη δύναμη του δύο και επαναλαμβάνουμε το (β) με το αποτέλεσμα της αφαίρεσης έως ότου φτάσουμε στο 0.

<u>Παράδειγμα</u>

$(27)_{10} = (?)_2$

$\mathbf{27 - 16 = 11}$

$\mathbf{11 - 8 = 3}$

$\cancel{\mathbf{3 - 4 =}}$

$\mathbf{3 - 2 = 1}$

$\mathbf{1 - 1 = 0}$

16	**8**	**4**	**2**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**

$(27)_{10} = (11011)_2$

Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα
Μέθοδος 2

Παράδειγμα

$(618)_{10} = (?)_2$

618 - 512 = 106

~~106 - 256~~ =

~~106 - 128~~ =

106 - 64 = 42

42 - 32 = 10

~~10 - 16~~ =

10 - 8 = 2

~~2 - 4~~ =

2 - 2 = 0

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0

$(618)_{10} = (1001101010)_2$

Παράδειγμα

$(3253)_{10} = (?)_2$

2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1

3253 - 2048 = 1205

1205 - 1024 = 181

~~181 - 512~~ =

~~181 - 256~~ =

181 - 128 = 53

~~53 - 64~~ =

53 - 32 = 21

21 - 16 = 5

~~5 - 8~~ =

5 - 4 = 1

~~1 - 2~~ =

1 - 1 = 0

$(3253)_{10} = (110010110101)_2$

Δυαδική αριθμητική

Μπορούν να γίνουν αριθμητικές πράξεις όπως και στο δεκαδικό σύστημα:

- **Πρόσθεση**
- **Αφαίρεση**
- **Πολλαπλασιασμός**
- **Διαίρεση**

Δυαδική αριθμητική: Πρόσθεση

Κανόνες:

0 + 0 = 0

0 + 1 = 1

1 + 0 = 1

1 + 1 = 10 (γράφουμε 0 και μεταφέρουμε ένα στο επόμενο ψηφίο)

Παράδειγμα

$$\begin{array}{r} 10110101 \\ 10100 \; + \\ \hline 11001001 \end{array}$$

Ασκήσεις στην τάξη (1)

Μετατρέψτε τους ακόλουθους δυαδικούς αριθμούς σε δεκαδικούς:

(α) $(10101010)_2$

$$= 1\times 2^7 + 0\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0$$

$$= 128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0$$

$$= (170)_{10}$$

(β) $(10101.111)_2$

$$= 1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}$$

$$= 16 + 0 + 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125$$

$$= (21.875)_{10}$$

Ασκήσεις στην τάξη (2)

Μετατρέψτε τους ακόλουθους δεκαδικούς αριθμούς σε δυαδικούς :

(α) 18

$18 \div 2 = 9$ και υπόλοιπο 0

$9 \div 2 = 4$ και υπόλοιπο 1

$4 \div 2 = 2$ και υπόλοιπο 0

$2 \div 2 = 1$ και υπόλοιπο 0

$1 \div 2 = 0$ και υπόλοιπο 1

$$\longrightarrow (18)_{10} = (10010)_2$$

(β) 232.125

232 - 128 = 104

104 - 64 = 40

40 - 32 = 8

~~**8 - 16**~~ **=**

8 - 8 = 0

128	64	32	16	8	4	2	1
1	1	1	0	1	0	0	0

$0.125 \times 2 = 0.250$ ακέραιος : 0

$0.25 \times 2 = 0.50$ ακέραιος : 0

$0.5 \times 2 = 1.0$ ακέραιος : 1

$$\boxed{(232.125)_{10} = (11101000.001)_2}$$

Ασκήσεις στην τάξη (3)

Κάνετε τις ακόλουθες πράξεις:

$$\begin{array}{r} 101011 \\ 110000 \\ \hline 1011011 \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 110111 \\ 101 \\ \hline 111100 \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 10011 \\ 100011 \\ 1111 \\ \hline 1000101 \end{array} +$$

Δυαδική αριθμητική: Αφαίρεση

Κανόνες:

0 - 0 = 0

0 - 1 = 1 (και δανειζόμαστε 1 από το επόμενο πιο σημαντικό ψηφίο)

(ή προσθέτουμε 1 στο επόμενο ψηφίο του αφαιρετέου)

1 - 0 = 1

1 - 1 = 0

<u>Παράδειγμα</u>

```
 110011
  10110  -
 ───────
  11101
```

<u>Παράδειγμα</u>

```
 110100100
   1001011  -
 ───────────
 1 01011 0 01
```

Δυαδική αριθμητική: Πολλαπλασιασμός

Κανόνες:

0*0 = 0

0*1 = 0

1*0 = 0

1*1 = 1

<u>Παράδειγμα</u>

```
  101001
     110  x
 ________
  000000
 101001
101001
_________
11110110
```

Παραδείγματα πολλαπλασιασμού

```
   10101
      10  x
 ________
   00000
  10101
 ________
  101010
```

Έλεγχος: 21x2 = 42

```
     111
     111  x
 ________
     111
    111
   111
 ________
  110001
```

Έλεγχος: 7x7 = 49

Παραδείγματα αφαίρεσης

$$\begin{array}{r} 1101101 \\ 1001 \; - \\ \hline 1100100 \end{array}$$

Έλεγχος: 109-9 = 100

$$\begin{array}{r} 1011011 \\ 110101 \; - \\ \hline 100110 \end{array}$$

Έλεγχος: 91-53 = 38

Ομαδοποίηση δυαδικών ψηφίων

Bit (Binary digiT - Δυαδικό ψηφίο)
Είναι η μικρότερη ποσότητα πληροφορίας
(π.χ. 0101: 4 bits, 10100011: 8bits)

1 Byte = 8 bits (μια ακολουθία 8 δυαδικών ψηφίων)
1 kiloByte (kB) = 2^{10} Bytes = 1024 Bytes
1 MegaByte (MB) = 2^{10} kB = 1048576 Bytes
1 GigaByte (GB) = 2^{10} MB
1 TeraByte (TB) = 2^{10} GB

Κωδικοποίηση δεδομένων - κώδικας ASCII

-- Οι Η/Υ αναπαριστούν κάθε είδους δεδομένα (γράμματα, αριθμούς, ήχο) μέσω ακολουθιών από δυαδικά ψηφία. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται κώδικες.

-- Το ASCII (American Standard Code for Information Interchange) δημιουργήθηκε για να υπάρχει μια κοινή αναπαράσταση δεδομένων.

-- Συμπεριλαμβάνει 128 αλφαριθμητικά στοιχεία

- ◊ 94 στοιχεία που μπορούν να εκτυπωθούν (26 κεφαλαία και 26 μικρά γράμματα, 10 αριθμούς και 32 σύμβολα)
- ◊ 34 στοιχεία που δεν μπορούν να εκτυπωθούν (χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο υπολογιστών)

-- Χρησιμοποιεί 7 δυαδικά ψηφία.

-- Ένα όγδοο ψηφίο χρησιμοποιείται για την ανίχνευση λαθών σε δεδομένα επικοινωνίας και υπολογισμού (ονομάζεται δυαδικό ψηφίο ισοτιμίας, parity bit).

Πίνακας ASCII

	$A_6 A_5 A_4$							
$A_3 A_2 A_1 A_0$	**000**	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
0000	NULL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB		7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM '	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Δυαδική λογική

◊ **Ασχολείται με**

-- δυαδικές μεταβλητές που μπορούν να πάρουν δύο διακριτές τιμές (1 και 0, ή σωστό και λάθος, ή true and false)

-- λογικές πράξεις χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω μεταβλητές

◊ **Οι δυαδικές μεταβλητές**

-- αναπαριστούνται με γράμματα του αλφαβήτου

-- μπορούν να πάρουν ΜΟΝΟ δύο τιμές (0 και 1)

◊ **Υπάρχουν τρεις βασικές πράξεις**

-- AND (και)

-- OR (ή)

-- NOT (αντιστροφή)

◊ **Μορφή δυαδικής λογικής συνάρτησης:**

***F*(μεταβλητές) = έκφραση**

Βασικοί λογικοί τελεστές

-- AND ή .

-- OR ή +

-- NOT ή ¯ ή ´

<u>Παράδειγμα</u>

$$F(a,b,c) = \overline{a}.b + \overline{\overline{b}.c}$$

$$G(a) = \overline{a}.1$$

Άλγεβρα Boole (Boolean algebra)

- Περιλαμβάνει τις πράξεις που γίνονται με δυαδικές μεταβλητές.
- Πήρε το όνομα της από τον George Boole (1854).

<u>Κανόνες πολλαπλασιασμού</u>

A.0 = 0

A.1 = A

A.A = A (όχι A^2)

A.A΄ = 0

<u>Κανόνες πρόσθεσης</u>

A+0 = A

A+1 = 1

A+A΄ = 1

A+A = A (όχι 2A)

<u>Αντιμεταθετική ιδιότητα</u>

A+B = B+A

A.B = B.A

<u>Προσεταιριστική ιδιότητα</u>

A+(B.C) = (A+B).(A+C)

A.(B+C) = (A.B)+(A.C)

<u>Άλλοι κανόνες</u>

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$\overline{(A+B)} = \overline{A}.\overline{B}$$

$$\overline{(A.B)} = \overline{A}+\overline{B}$$

Παράδειγμα άλγεβρας Boole

$$
\begin{aligned}
(X+Y).(X+Z).\overline{(\overline{X}.Y)} &= (XX+YX+XZ+YZ)(\overline{\overline{X}}+\overline{Y}) \\
&= (X+YX+XZ+YZ)(X+\overline{Y}) \\
&= (X(1+Y+Z)+YZ)(X+\overline{Y}) \\
&= (X+YZ)(X+\overline{Y}) \\
&= XX+YZX+X\overline{Y}+YZ\overline{Y} \\
&= X+YZX+X\overline{Y}+0 \\
&= X(1+YZ+\overline{Y}) \\
&= X
\end{aligned}
$$

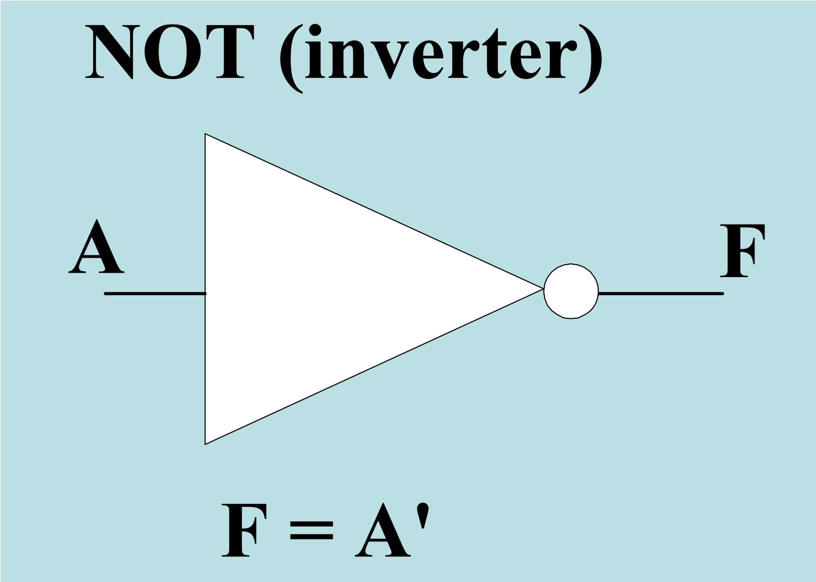
Διατάξεις ψηφιακής λογικής

- **Λογικές πύλες (logic gates)**
  - **-- Είναι το βασικό συστατικό των ψηφιακών κυκλωμάτων.**
  - **-- Αποτελούνται από μια ή περισσότερες εισόδους (inputs) (συνήθως δύο) και μια έξοδο (output). Κάθε τερματικό (είσοδος ή έξοδος) έχει μια τιμή (είτε 1, είτε 0).**
  - **-- Υπάρχουν εφτά βασικές λογικές πύλες (NOT, AND, OR, NAND, NOR, XOR, XNOR).**

- **Πίνακας αληθείας (truth table)**
  - **-- Ορίζει όλες τις πιθανές τιμές των εισερχόμενων και εξερχόμενων σημάτων μιας λογικής πύλης.**

Πύλη αντιστροφής (NOT gate)

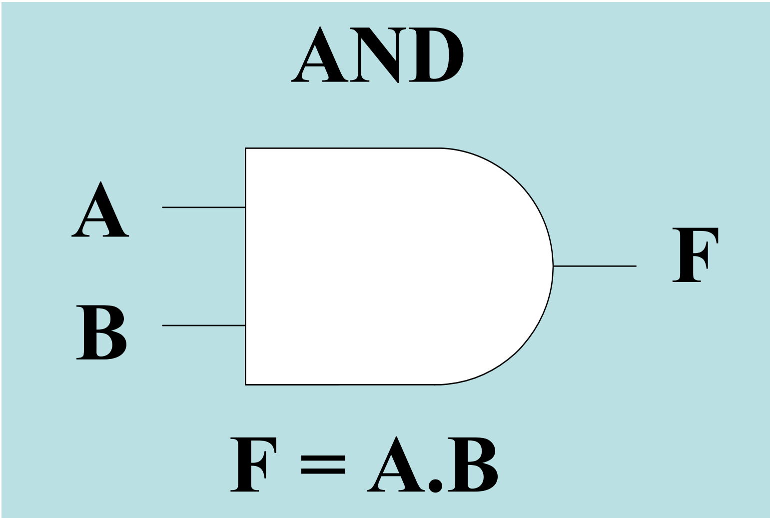
Το F είναι σωστό (1) αν το A είναι λάθος (0)



A	F=A΄
0	1
1	0

Πύλη AND

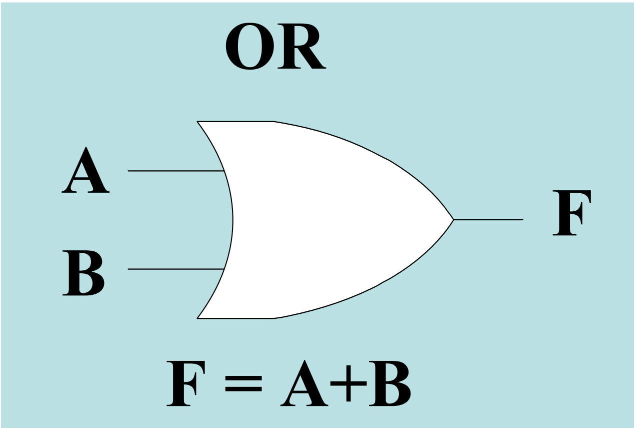
Το F είναι σωστό (1) αν το A είναι σωστό (1) και το B είναι σωστό (1)



A	B	F=A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Πύλη OR

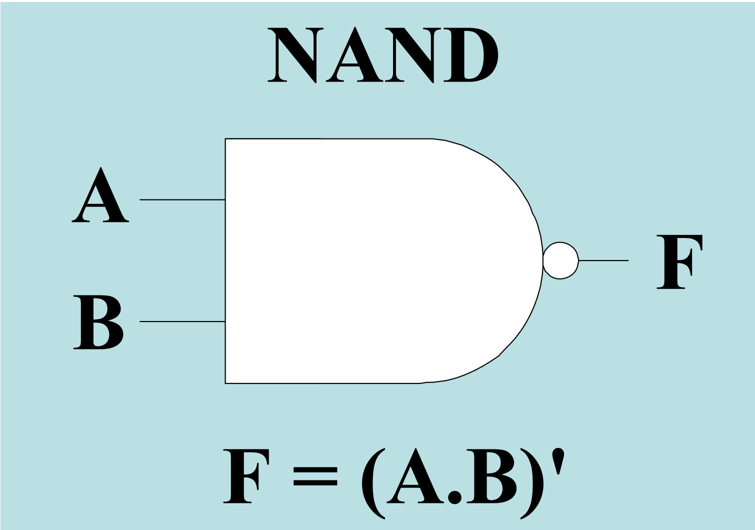
Το F είναι σωστό (1) αν το A είναι σωστό (1) ή το B είναι σωστό (1)



A	B	F=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Πύλη NAND

Το F είναι λάθος (0) αν το A είναι σωστό (1) <u>και</u> το B είναι σωστό (1)

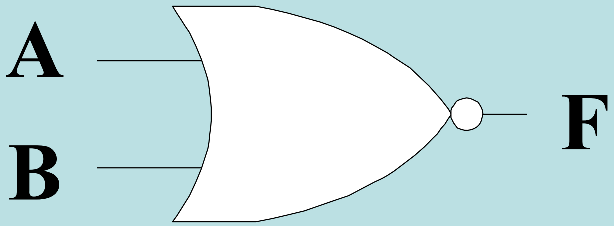


A	B	F=(A.B)´
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πύλη NOR

Το F είναι σωστό (1) αν το A είναι λάθος (0) <u>και</u> το B είναι λάθος (0)

NOR



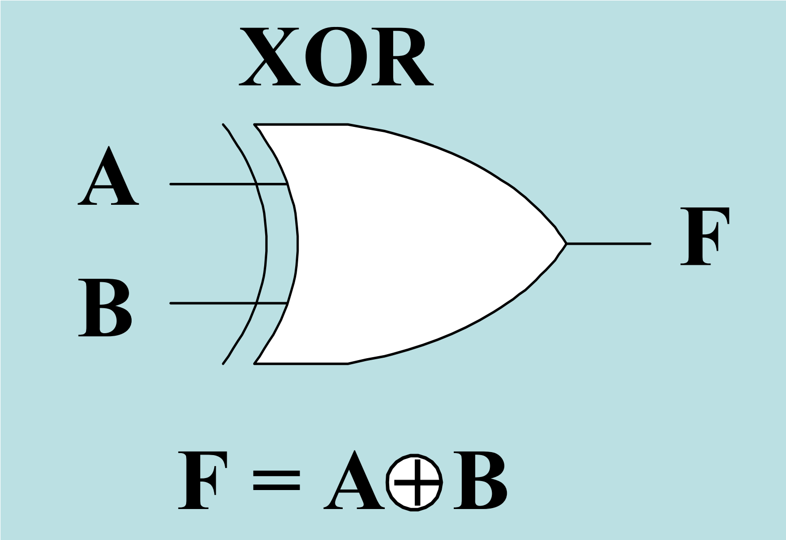
F = (A+B)'

A	B	F=(A+B)´
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Πύλη XOR

Το F είναι λάθος (0) αν το A και το B έχουν την ίδια τιμή

XOR: eXclusive OR

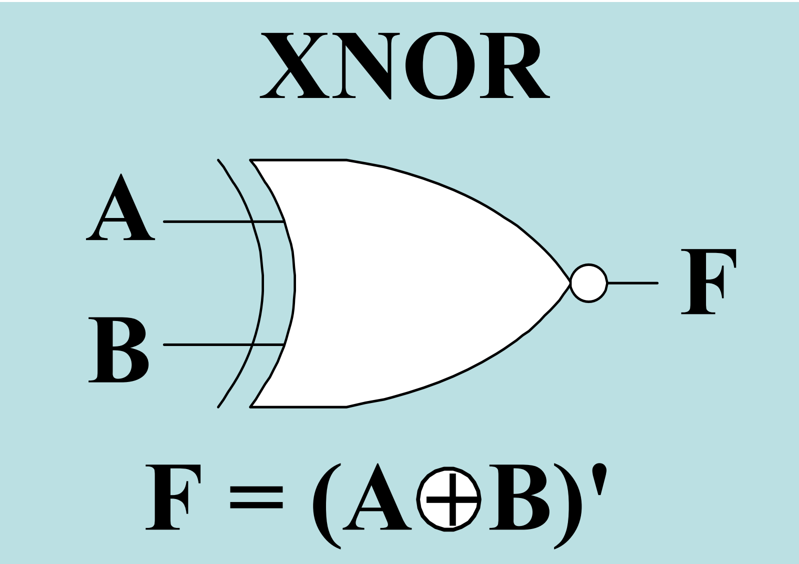


A	B	$F=A\oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Πύλη XNOR

Το F είναι σωστό (1) αν το A και το B έχουν την ίδια τιμή

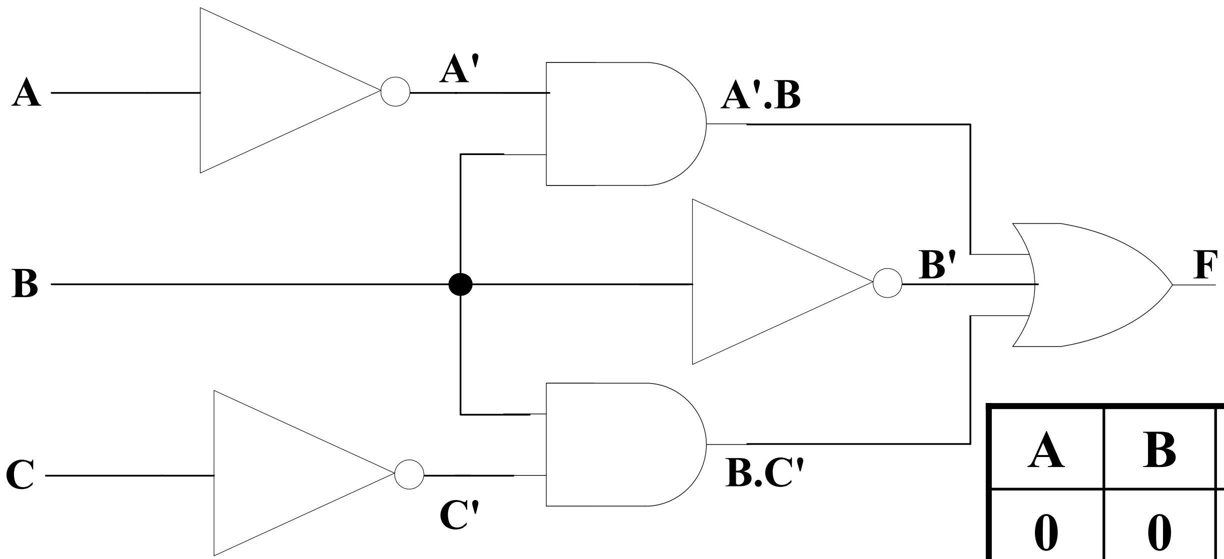
XNOR: eXclusive NOR



A	B	$F=(A\oplus B)'$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Κύκλωμα συνδυαστικής λογικής από λογική συνάρτηση

Λογική συνάρτηση: F = B΄ + A΄.B + B.C΄



Πίνακας αληθείας

A	B	C	B΄	A΄.B	B.C΄	F
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Παράδειγμα (2)

Λογική συνάρτηση: F = A΄ + A.B.C΄ + B΄.C΄